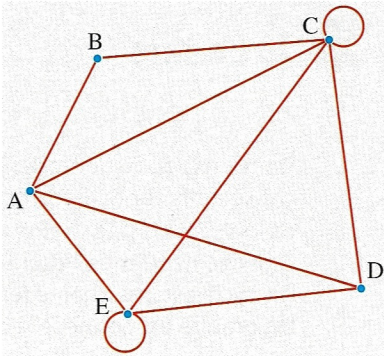


6. Énoncés des exercices

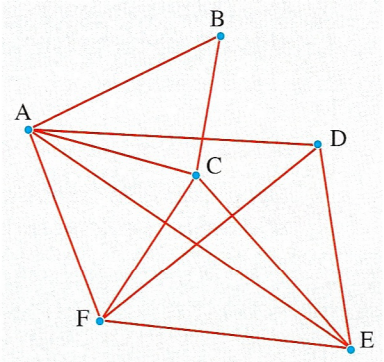
Exercice 8.1 On considère le graphe G ci-dessous.



1. Quel est l'ordre du graphe ?
2. Ce graphe est-il simple ? Justifier la réponse.
3. Compléter le tableau suivant :

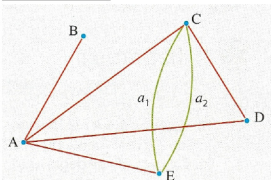
Sommet					
Degré					
4. Combien vaut la somme des degrés des sommets de ce graphe ?
Déduisez-en le nombre d'arêtes du graphe.
5. Les sommets B et D sont-ils adjacents ?
6. Dessiner le sous-graphe ADE. Quel est son ordre et combien possède-t-il d'arêtes ?

Exercice 8.2 On considère le graphe G représenté ci-dessous.



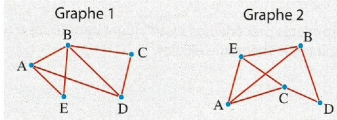
1. Quel est l'ordre du graphe ?
2. Le graphe est-il simple ?
3. Le graphe est-il complet ?
4. Déterminer un sous-graphe complet d'ordre 4. Quel est le degré de chacun de ses sommets ?
5. Déterminer un sous-graphe complet d'ordre 3. Quel est le degré de chacun de ses sommets ?

Exercice 8.3 On considère le graphe ci-dessous :

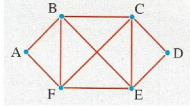


1. Le graphe est-il connexe ? Le graphe est-il simple ?
2. On considère la chaîne B-A-C- a_2 -E-A-B.
 - (a) Quelle est sa longueur ?
 - (b) Est-ce une chaîne fermée ?
 - (c) est-ce un cycle ?

Exercice 8.4 Peut-on dessiner sans lever le crayon et en ne passant qu'une seule fois sur chaque arête les graphes ci-dessous ? justifier la réponse.

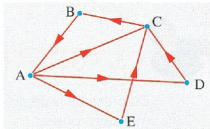


Exercice 8.5 Le graphe ci-dessous indique les parcours possibles entre les sept bâtiments d'une entreprise.



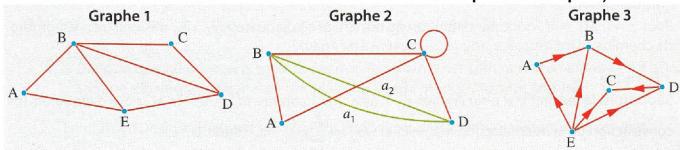
Un agent de sécurité effectue régulièrement des rondes de surveillance en partant du point A. En justifiant la réponse, montrer qu'il est possible pour l'agent de revenir à son point de départ en passant une fois et une seule par tous les chemins de cette entreprise.

Exercice 8.6 On considère le graphe orienté ci-dessous.



1. Quel est l'ordre du graphe ?
2. Quel est le degré entrant du sommet C ? Le degré sortant du sommet B ?
3. Déterminer une chaîne de longueur 2 reliant les sommets A et C.

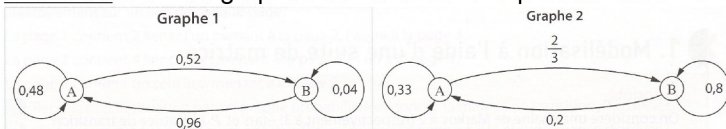
Exercice 8.7 Dans chacun des cas, déterminer la matrice d'adjacence associée au graphe donné (en considérant les sommets dans l'ordre alphabétique).



Exercice 8.8 On considère le graphe 1 de l'exercice précédent, et on note M_1 sa matrice d'adjacence. On souhaite déterminer les chaînes de longueur 3 reliant les sommets A et E.

1. A l'aide de la matrice M_1^3 , déterminer le nombre de chaînes de longueur 3 reliant les sommets A et E.
2. Lister les différentes chaînes possibles.

Exercice 8.9 Les graphes suivants sont-ils probabilistes ? Si oui, donner la matrice de transition associée.



Exercice 8.10 Un robot se déplace sur un triangle ABC. A chaque étape :

- S'il est en A, il choisit de façon aléatoire soit de rester en A, soit de se déplacer vers B ou C ;
- S'il est en B, il se déplace aléatoirement vers A ou C ;
- S'il est en C, il se déplace vers A.

On note X_n la variable aléatoire donnant la position du robot à l'étape n .

Au début de l'expérience, pour $n = 0$, on place le robot en A.

1. Donner la distribution initiale du système, c'est-à-dire $P(X_0 = A)$, $P(X_0 = B)$, et $P(X_0 = C)$.
2. A l'aide d'un arbre pondéré, déterminer la distribution du système après deux étapes.
3. Expliquer pourquoi la suite (X_n) est une chaîne de Markov, et donner le graphe probabiliste et la matrice associée.

Exercice 8.11 Un internaute navigue sur un réseau informatique contenant 3 pages internet en cliquant successivement et aléatoirement sur un lien de chaque page.

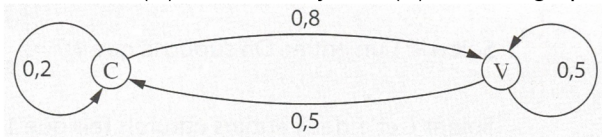
La page 1 contient 2 liens : l'un menant à la page 2, l'autre menant à la page 3.

La page 2 contient 4 liens : trois menant à la page 3, et un à la page 1.

La page 3 contient un seul lien menant à la page 2.

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste et donner la matrice de transition P associée.
2. L'internaute est sur la page 1 et effectue 9 clics, sur quelle page a-t-il le plus de chances d'arriver ?

Exercice 8.12 On a programmé un ordinateur pour qu'il affiche successivement des lettres qui sont soit des consonnes (C), soit des voyelles (V) selon le graphe probabiliste ci-dessous :



1. On suppose que la première lettre est une consonne. Calculer la probabilité que la cinquième lettre soit une consonne.
2. Déterminer la distribution invariante de ce système. Interpréter le résultat.